

# EL MÉTODO DE NEWTON PARA RAÍCES COMPLEJAS. FRACTALES EN EL PROBLEMA DE CAYLEY

 JUNETH ANDREA TERÁN TARAPUÉS<sup>1</sup>  
CATALINA MARÍA RÚA ÁLVAREZ<sup>2</sup>

## RESUMEN

Cuando la búsqueda de la solución de un problema de aplicación implica la resolución de ecuaciones no lineales se hace uso de métodos numéricos. Siendo el método de Newton uno de los más usados debido a su versatilidad y agilidad, es de gran interés emplearlo especialmente para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales. Solucionar ecuaciones con variable compleja a través del método de Newton tiene una aplicación muy interesante en el campo de los fractales como es la del problema de Cayley y las figuras fractales que se producen a partir de la convergencia, divergencia e incluso la eficiencia del método. En este artículo se muestra el estudio del problema de Cayley a través de la generalización del método de Newton a  $\mathbb{R}^2$ . Además, se presentan algunos fractales producidos por iteraciones del método de Newton en los complejos.

**PALABRAS CLAVES:** Método de Newton; Sistemas de ecuaciones; Raíces complejas; Problema de Cayley; Fractal.

## NEWTON'S METHOD FOR COMPLEX ROOTS. FRACTALS IN CAYLEY'S PROBLEM

## ABSTRACT

When the search for the solution of an application problem involves the resolution of nonlinear equations, numerical methods are used. Newton's method is one of the most used because of its versatility and agility and due to this is an excellent option to approximate the solutions of non-linear equation systems. Solving equations with complex

<sup>1</sup> Estudiante de Licenciatura en Matemáticas. Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Nariño.

<sup>2</sup> Matemática. Doctora en Matemática Aplicada. Profesora asistente. Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Nariño.



*Autor de correspondencia: Terán Tarapués, J.A. (Juneth Andrea):* Cra 35 No 7 Oeste-26 apto 402, Balcones de los Rosales. Pasto, Nariño, Colombia. Tel.: 315 602 0910. Correo electrónico: Juneth0102@hotmail.com

*Historia del artículo:*

Artículo recibido: 30-VI-2017 / Aprobado: 15-V-2018

Disponible online: 10 de mayo de 2018

Discusión abierta hasta octubre de 2019

variable through Newton's method has an interesting application in the field of fractals such as Cayley's problem and the fractal figures produced by the convergence, divergence and efficiency of the method. In this paper the study of the Cayley's problem is presented through the generalization of Newton's method to  $\mathbb{R}^2$ . In addition, are presented some fractal produced by iterations of the Newton's method in the complex plane.

**KEY WORDS:** Newton's method; Non-linear equation system; Complex roots; Cayley's problem; Fractal.

## O MÉTODO DO NEWTON PARA RAIZES COMPLEXAS. FRACTAIS NO PROBLEMA DO CAYLEY

### RESUMO

A procura da solução de um problema de aplicação envolve a resolução de equações não-lineares as vezes consegue-se com o uso de métodos numéricos. O método de Newton é muito utilizado devido à sua versatilidade e agilidade, sendo de grande interesse usá-lo para aproximar soluções de sistemas de equações não-lineares. Resolver equações com variáveis complexas através do método Newton tem uma aplicação interessante no campo dos fractais como é o problema de Cayley e as figuras fractais produzidas a partir da convergência, divergência e até mesmo a eficiência. Este artigo descreve o estudo do problema de Cayley desde a generalização do método de Newton a  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, apresenta-se alguns fractais produzidos por iterações do método de Newton no plano complexo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Método de Newton; Sistemas de equações; Raízes complexas; Problema de Cayley; Fractal.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Una gran variedad de aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia, exigen en su modelación matemática la necesidad de solución de ecuaciones no lineales para la obtención de un resultado específico. Dicha solución no siempre se puede encontrar de manera exacta y en muchos casos se debe recurrir a métodos numéricos.

Entre los métodos más conocidos para aproximar la solución o raíz de una ecuación no lineal, se destaca el método de Newton que se caracteriza por tener orden de convergencia de al menos 2, lo que hace que su velocidad de convergencia sea considerablemente buena. Este método, también posee teoremas que garantizan la convergencia global y local, es decir, converge para aproximaciones iniciales muy cercanas a la solución deseada; pero esto no impi-

de que converja globalmente (a partir de cualquier aproximación inicial) Burden (2002), Gutiérrez, Olmos y Casillas (2010), Mora (2010) y Sauer (2013). Además, el método de Newton puede ser deducido por diferentes caminos, como es desde su interpretación geométrica, como mejora del orden de convergencia de la iteración del punto fijo y mediante expansiones de series de Taylor, ver en Burden (2002).

En los problemas que se desarrollan en las ciencias, además de encontrar ecuaciones no lineales que representan cierto modelo, se encuentra sistemas de ecuaciones no lineales que responden a las características de modelación. Debido a esto, es importante entender la generalización en varias variables del método de Newton, con la cual se puede buscar una aproximación a la solución de un sistema de ecuaciones no lineales. Incluso, trabajar con esta extensión permite ampliar ciertos conocimientos referentes al cálculo de varias variables y al

álgebra lineal, por ejemplo el estudio de la matriz Jacobiana, métodos para encontrar la inversa de esta matriz y hasta aproximaciones numéricas de estos, entre otros. Pita (1995).

Como la representación de números en el plano complejo está dada por un par ordenado, que a su vez se puede relacionar de forma vectorial, entonces con la extensión del método de Newton a sistemas se pueden aproximar soluciones de ecuaciones de variable compleja como un caso particular de ecuaciones de dos variables. A su vez, la versatilidad del método de Newton también permite que se aplique para aproximar soluciones de ecuaciones de variable compleja mediante una función de iteración de variable compleja, Rubiano (2007).

Uno de los problemas más destacados en la aproximación de soluciones de ecuaciones de variable compleja a través del método de Newton es el problema de Cayley, ver en Plazas y Gutiérrez (2013) y Rubiano (2007), el cual se enuncia: “¿si se parte de un punto aleatorio del plano complejo, a qué raíz de la función  $f(z) = z^3 - 1$  convergirá el método de Newton?”. Se itera el método de Newton para  $z^3 - 1 = 0$  y al relacionar los valores de convergencia que se producen de la iteración resulta un comportamiento fractal.

Aunque existen otros métodos, como el método de la secante y el método Quasi-Newton, que no presentan la dificultad en el cálculo de derivadas o que tienen un orden de convergencia mayor y aproximan soluciones en un número menor de iteraciones, cabe resaltar que algunos de estos resultan de modificaciones al método de Newton y aun así, este método prevalece como una de los más usados, Plazas y Gutiérrez (2013).

El método de Newton es entonces un método diverso con el que se pueden resolver variados problemas de aplicación. Finalmente, este artículo no solo es beneficioso para las personas relacionadas

en su ejecución. También les permitirá a más estudiantes interesados hacer uso de los resultados para desarrollar otros problemas de aplicación.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

En general, es complicado resolver directamente por métodos analíticos ecuaciones no lineales, por lo que se deben usar métodos basados en aproximaciones numéricas para determinar soluciones aproximadas. A continuación se presenta uno de estos métodos numéricos, conocido como el método de Newton, donde la información que se relaciona en esta sección se puede ampliar en Burden (2002) y Gutiérrez, Olmos y Casillas (2010).

### *Método de Newton*

Dada la función diferenciable  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y una aproximación inicial  $x_0$  para obtener la solución a  $f(x) = 0$  la iteración del método de Newton está por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (1)$$

donde  $f'(x_n) \neq 0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

El método de Newton se puede obtener de tres formas, por su interpretación geométrica, como mejora al orden de convergencia de la iteración del punto fijo y mediante expansiones de series de Taylor. Presentamos a continuación la deducción por series de Taylor.

Para obtener el método de Newton por expansiones de series de Taylor se considera el primer polinomio de Taylor para  $f(x)$ . Así, sea  $f$  una función con segunda derivada continua en un intervalo  $[a, b]$  y  $x^* \in [a, b]$  una aproximación de la solución  $x_1$ , tal que  $|x_1 - x^*|$  es “pequeño”, además  $f'(x^*) \neq 0$  y  $f(x_1) = 0$ .

Se expande  $f$  por series de Taylor alrededor de  $x^*$ , obteniendo ()

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x - x^*) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x^*)^2 \quad (2)$$

Ahora, se hace  $x = x_1$

$$f(x_1) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x_1 - x^*) + \frac{f''(\mathcal{E})}{2!}(x_1 - x^*)^2,$$

Luego como por hipótesis  $f(x_1) = 0$ , se tiene que

$$0 = f(x^*) + f'(x^*)(x_1 - x^*) + \frac{f''(\mathcal{E})}{2}(x_1 - x^*)^2.$$

Como  $|x_1 - x^*|$  debe ser “pequeño” para ser una buena aproximación, entonces  $(x_1 - x^*)^2$  es mucho más “pequeño”. Por tanto, si  $\frac{f''(\mathcal{E})}{2}$  está acotado, el término

$$\frac{f''(\mathcal{E})}{2}(x_1 - x^*)^2 \rightarrow 0.$$

Así  $0 \approx f(x^*) + f'(x^*)(x_1 - x^*)$ .

Despejamos en la anterior a  $x_1$ , se sigue que

$$\frac{x^*f'(x^*) - f(x^*)}{f'(x^*)} \approx x_1$$

o de forma equivalente que

$$x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \approx x_1.$$

Y de este modo, al continuar de forma inductiva, se obtiene la ecuación de iteración del método de Newton (1).

Esta iteración del método de Newton puede ser generalizada para encontrar buenas aproximaciones de soluciones de sistemas de  $n$  ecuaciones no

lineales con  $n$  incógnitas, a continuación se muestra, como inicio de este proceso de generalización, el método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales.

### *Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales.*

El método de Newton puede ser generalizado a sistemas de  $n$  ecuaciones con  $n$  variables, precisamente se puede obtener una buena aproximación de un vector solución de un sistema a través de este método, Pita (1995). Se considera el caso de un sistema de 2 ecuaciones con dos variables.

Sea  $F(x, y) = 0$  un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$ , dado por dos funciones diferenciables  $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} h(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Se usa el primer polinomio de Taylor para funciones de varias variables.

Supongamos una aproximación  $(x^*, y^*)$  de la solución  $(x_1, y_1)$  del sistema, es decir

$$x_1 - x^* = m_1$$

$$y_1 - y^* = m_2$$

Donde  $m_1$  y  $m_2$  son valores cercanos a cero.

Se realiza la expansión de Taylor, para cada función  $h$  y  $g$ , alrededor de  $(x^*, y^*)$ .

Así para  $h$  se tiene

$$h(x, y) = h(x^*, y^*) + (x - x^*, y - y^*)F'(x^*, y^*) + \frac{(x - x^*, y - y^*)^2}{2}F''(\mathcal{E}).$$

De forma análoga a como se hizo en el caso real, se reemplaza  $(x, y) = (x_1, y_1)$  en la anterior expansión. De aquí se tiene

$$h(x_1, y_1) = h(x^*, y^*) + (x_1 - x^*, y_1 - y^*)F'(x^*, y^*) + \frac{(x_1 - x^*, y_1 - y^*)^2}{2}F''(\mathcal{E}),$$

es decir

$$h(x_1, y_1) = h(x^*, y^*) + (m_1, m_2)F'(x^*, y^*) + \frac{(m_1, m_2)^2}{2}F''(\mathcal{E}).$$

Como  $m_1$  y  $m_2$  tienden ambos a cero, asumiendo que la norma de  $F''(\mathcal{E})$  está acotada, el término  $\frac{(m_1, m_2)^2}{2}$  tiende también a cero. Por tanto, al sustituir en la serie de Taylor se sigue que

$$h(x_1, y_1) \approx h(x^*, y^*) + (m_1, m_2) \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial h}{\partial y_1}(x^*, y^*) \end{bmatrix}.$$

De donde

$$h(x_1, y_1) \approx h(x^*, y^*) + m_1 \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*, y^*) + m_2 \frac{\partial h}{\partial y_1}(x^*, y^*).$$

Procediendo de forma análoga, se obtiene para la función  $g$  que

$$g(x_1, y_1) \approx g(x^*, y^*) + m_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*, y^*) + m_2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(x^*, y^*).$$

Luego, como  $(x_1, y_1)$  es una solución del sistema, entonces

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1) &= 0 \\ g(x_1, y_1) &= 0 \end{aligned}$$

Al reemplazar en las aproximaciones determinadas para  $h$  y  $g$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\approx h(x^*, y^*) + m_1 \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*, y^*) + m_2 \frac{\partial h}{\partial y_1}(x^*, y^*) \\ 0 &\approx g(x^*, y^*) + m_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*, y^*) + m_2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(x^*, y^*) \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} h(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*, y^*) & \frac{\partial h}{\partial y_1}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y_1}(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

Donde  $\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*, y^*) & \frac{\partial h}{\partial y_1}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y_1}(x^*, y^*) \end{bmatrix}$  es la matriz Jacobiana asociada al sistema de **Ecuaciones (3)**

y se denota con  $JF$ .

Ahora en el anterior sistema, al recordar que  $x_1 - x^* = m_1$  y  $y_1 - y^* = m_2$ , se despeja  $(x_1, y_1)$  y aplicando la inversa de una matriz  $2 \times 2$ , se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} - \frac{1}{\det JF(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(x^*, y^*) & -\frac{\partial h}{\partial y_1}(x^*, y^*) \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*, y^*) & \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Así, (3) se puede escribir de la siguiente manera

$$x_1 \approx x^* - \frac{1}{\det JF(x^*, y^*)} \left( h(x^*, y^*) \frac{\partial g}{\partial y_1}(x^*, y^*) - g(x^*, y^*) \frac{\partial h}{\partial y_1}(x^*, y^*) \right)$$

$$y_1 \approx y^* - \frac{1}{\det JF(x^*, y^*)} \left( g(x^*, y^*) \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*, y^*) - h(x^*, y^*) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*, y^*) \right).$$

De la cual se concluye la función de iteración de varias variables del método de Newton para una aproximación inicial  $(x^*, y^*) = (x_0, y_0)$ , dada por

$$x_{n+1} \approx x_n - \frac{1}{\det JF(x_n, y_n)} \left( h(x_n, y_n) \frac{\partial g}{\partial y_1}(x_n, y_n) - g(x_n, y_n) \frac{\partial h}{\partial y_1}(x_n, y_n) \right) \quad (5)$$

$$y_{n+1} \approx y_n - \frac{1}{\det JF(x_n, y_n)} \left( g(x_n, y_n) \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_n, y_n) - h(x_n, y_n) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_n, y_n) \right) \quad (6)$$

Con esta función iterativa para sistemas de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas se puede no solo aproximar las soluciones de este tipo de sistemas de ecuaciones no lineales, sino también las de funciones de variable compleja.

En el siguiente apartado se resume una de las aplicaciones del método de Newton en el plano complejo que es la del problema de Cayley. Además, en la sección 3 se mostrará una simulación numérica de este problema empleando las funciones de iteración (5) y (6).

### El problema de Cayley

En 1879 Arthur Cayley enunció el siguiente problema:

“¿Si se parte de un punto aleatorio del plano complejo, a qué raíz de la función  $f(z) = z^3 - 1$  convergirá el método de Newton?”. Plazas y Gutiérrez (2013).

Este problema propone el estudio de las zonas de convergencia de sucesiones de puntos obtenidos con la iteración del método de Newton. En Plazas y Gutiérrez (2013) se trabaja este problema considerando la función de iteración de Newton como una función racional compleja, más adelante Julia y Fatou amplían el estudio de la dinámica de ese tipo de funciones, Sutherland (2014).

Cayley intentó deducir la solución de su problema partiendo de un problema más sencillo. E intentó solucionar inicialmente una pregunta como ¿Si se parte de un punto aleatorio del plano complejo, a qué raíz de la función  $f(z) = z^2 - 1$  convergirá el método de Newton?”.

Cayley probó que al considerar un dominio complejo y aplicar la iteración del método de Newton para  $f(z) = z^2 - 1$  a cada punto, el dominio se subdivida en dos regiones y donde cada región es una zona de convergencia para la raíz que contenía. Se obtiene

de esta forma una representación como la presentada en la **Figura 1**, en la cual los puntos relacionados al color rojo convergen al punto  $(0, -1)$  y los puntos relacionados al color verde convergen al punto  $(0, 1)$ .



Cayley creía que podía generalizar este resultado a su problema, pero el comportamiento de las zonas de convergencia a través del método de Newton para  $f(z) = z^3 - 1$  presenta un reto mayor. En la siguiente sección se muestra una simulación del problema de Cayley.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIONES.

Debido a la equivalencia topológica del plano complejo con el plano real, una función de variable compleja puede ser escrita como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Entonces la función del problema de Cayley  $f(z) = z^3 - 1$ , para  $z = x + iy$ , se puede escribir de la siguiente forma

$$f_r(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1 \tag{6}$$

$$f_i(x, y) = 3x^2y - y^3 \tag{7}$$

Donde  $f_r$  es la parte real de  $f(z)$  y  $f_i$  es la parte imaginaria de  $f(z)$ .

Ahora de **(6)** y **(7)**, se considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 - 3xy^2 - 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

De donde la función de iteración del método de Newton está dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\det JF(x_n, y_n)} \left[ (x^3 - 3x_n y_n^2)(3x_n^2 - 3y_n^2) - (3x_n^2 y_n - y_n^3)(-6x_n y_n) \right] \tag{9}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{\det JF(x_n, y_n)} \left[ (3x_n^2 y_n - y_n^3)(3x_n^2 - 3y_n^2) - (x^3 - 3x_n y_n^2)(6x_n y_n) \right] \tag{10}$$

La matriz Jacobiana asociada es

$$JF(x_n, y_n) = \begin{bmatrix} 3x_n^2 - 3y_n^2 & -6x_n y_n \\ 6x_n y_n & 3x_n^2 - 3y_n^2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

y su determinante está dado por

$$\det JF(x_n, y_n) = (3x_n^2 - 3y_n^2)^2 + (6x_n y_n)^2. \tag{12}$$

Por tanto, la función de iteración del método de Newton es como sigue

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x^3 - 3x_n y_n^2)(3x_n^2 - 3y_n^2) - (3x_n^2 y_n - y_n^3)(-6x_n y_n)}{(3x_n^2 - 3y_n^2)^2 + (6x_n y_n)^2} \tag{13}$$



$$y_{n+1} = y_n - \frac{(3x_n^2 y_n - y_n^3)(3x_n^2 - 3y_n^2) - (x^3 - 3x_n y_n^2)(6x_n y_n)}{(3x_n^2 - 3y_n^2)^2 + (6x_n y_n)^2} \tag{14}$$

A continuación se itera el método de Newton para obtener una aproximación de cada una de las tres soluciones del sistema de ecuaciones (7), dadas por:

- (1, 0).
- $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-0,5, 0,866025)$ .
- $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-0,5, -0,866025)$ .

Las siguientes tablas contienen iteraciones del método de Newton para el sistema de **Ecuacio-**

**nes (7)**, con una tolerancia  $tol = 10^{-7}$  y un máximo de 100 iteraciones. En la **Tabla 1** la aproximación inicial es  $(x_0, y_0) = (0,88, 0,88)$  y la convergencia es a la raíz (1, 0). Por otro lado, los valores en la **Tabla 2** parten de la aproximación inicial  $(x_0, y_0) = (0,5, 0,5)$  y convergen a la raíz  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Finalmente, en la **Tabla 3** se encuentran los valores de la iteración del método de Newton a partir de la aproximación inicial  $(x_0, y_0) = (0,5, -0,5)$ , la cual converge a la raíz  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**TABLA 1.** ITERACIONES DEL MÉTODO DE NEWTON PARA APROXIMAR LA SOLUCIÓN (1, 0) CON UNA APROXIMACIÓN INICIAL  $(x_0, y_0) = (0,88, 0,88)$

<i>i</i>	$x_n$	$y_n$	<i>Error</i>
0	$5,866667 \times 10^{-1}$	$3,714463 \times 10^{-1}$	$5,870871 \times 10^{-1}$
1	$6,867858 \times 10^{-1}$	$-3,772995 \times 10^{-1}$	$7,554099 \times 10^{-1}$
2	$7,490080 \times 10^{-1}$	$2,066485 \times 10^{-1}$	$5,872537 \times 10^{-1}$
3	$9,733641 \times 10^{-1}$	$-1,453483 \times 10^{-1}$	$4,174176 \times 10^{-1}$
4	$9,780484 \times 10^{-1}$	$3,640857 \times 10^{-3}$	$1,490628 \times 10^{-1}$
5	1,000482	$-1,670562 \times 10^{-4}$	$2,275433 \times 10^{-2}$
6	1,000000	$-1,608481 \times 10^{-7}$	$5,097361 \times 10^{-4}$
7	1,000000	$-6,671433 \times 10^{-14}$	$2,876030 \times 10^{-7}$
8	1,000000	$5,292839 \times 10^{-21}$	$6,671433 \times 10^{-14}$

**TABLA 2.** ITERACIONES DEL MÉTODO DE NEWTON PARA APROXIMAR LA SOLUCIÓN (-0,5, 0,866025) CON UNA APROXIMACIÓN INICIAL  $(x_0, y_0) = (0,5, 0,5)$

<i>i</i>	$x_n$	$y_n$	<i>Error</i>
0	$3,333333 \times 10^{-1}$	$-3,333333 \times 10^{-1}$	$8,498366 \times 10^{-1}$
1	$2,222222 \times 10^{-1}$	1,277778	1,614938
2	$-3,838164 \times 10^{-2}$	$7,849483 \times 10^{-1}$	$5,574901 \times 10^{-1}$
3	$-5,627219 \times 10^{-1}$	$5,759533 \times 10^{-1}$	$5,644570 \times 10^{-1}$
4	$-3,870940 \times 10^{-1}$	$8,979334 \times 10^{-1}$	$3,667647 \times 10^{-1}$
5	$-4,974191 \times 10^{-1}$	$8,520995 \times 10^{-1}$	$1,194670 \times 10^{-1}$
6	$-4,999667 \times 10^{-1}$	$8,662269 \times 10^{-1}$	$1,435530 \times 10^{-2}$
7	$-5,000000 \times 10^{-1}$	$8,660254 \times 10^{-1}$	$2,042019 \times 10^{-4}$
8	$-5,000000 \times 10^{-1}$	$8,660254 \times 10^{-1}$	$5,319353 \times 10^{-8}$



**TABLA 3.** ITERACIONES DEL MÉTODO DE NEWTON PARA APROXIMAR LA SOLUCIÓN  $(-0,5, -0,866025)$  CON UNA APROXIMACIÓN INICIAL  $(x_0, y_0) = (0,5, -0,5)$

$i$	$x_n$	$y_n$	Error
0	$3,333333 \times 10^{-1}$	$3,333333 \times 10^{-1}$	$8,498366 \times 10^{-1}$
1	$2,222222 \times 10^{-1}$	$-1,277778$	1,614938
2	$-3,838164 \times 10^{-2}$	$-7,849483 \times 10^{-1}$	$5,574901 \times 10^{-1}$
3	$-5,627219 \times 10^{-1}$	$-5,759533 \times 10^{-1}$	$5,644570 \times 10^{-1}$
4	$-3,870940 \times 10^{-1}$	$-8,979334 \times 10^{-1}$	$3,667647 \times 10^{-1}$
5	$-4,974191 \times 10^{-1}$	$-8,520995 \times 10^{-1}$	$1,194670 \times 10^{-1}$
6	$-4,999667 \times 10^{-1}$	$-8,662269 \times 10^{-1}$	$1,435530 \times 10^{-2}$
7	$-5,000000 \times 10^{-1}$	$-8,660254 \times 10^{-1}$	$2,042019 \times 10^{-4}$
8	$-5,000000 \times 10^{-1}$	$-8,660254 \times 10^{-1}$	$5,319353 \times 10^{-8}$

En las **Tablas 1, 2 y 3** se muestran buenas aproximaciones de las soluciones del sistema de ecuaciones **(7)** que son, gracias a la equivalencia topológica de  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , aproximaciones de las raíces de  $f(z) = z^3 - 1$ . Así con las sucesiones de puntos obtenidos se procede a estudiar las zonas de convergencia de las raíces, es decir, cómo convergen dichas sucesiones a las raíces y este análisis se muestra a continuación. El error presentado en estas tablas, se calculó a partir de la norma euclidiana para vectores en  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.1 Cuencas de Atracción

Se realiza el estudio de las zonas de convergencia para las tres raíces de la ecuación  $f(z) = z^3 - 1$ .

Para la raíz real  $z = 1$  el análisis gráfico del comportamiento atractor de  $z = x = 1$  como punto fijo de la función de iteración del método de Newton para  $f(x) = x^3 - 1$ , dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2}, \quad (15)$$

se representa con una gráfica descendente en forma de escalera que parte de un punto cualquiera de  $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2}$  y que converge al punto  $(1, 0)$ . Se procede de la siguiente manera:

1. Se grafica  $f(x)$  y la diagonal  $y = x$ .
2. Se escoge un punto  $(x_0, y_0)$  de  $f(x)$ .

3. Se traza una paralela al eje  $x$  hasta marcar el punto de corte con la diagonal.

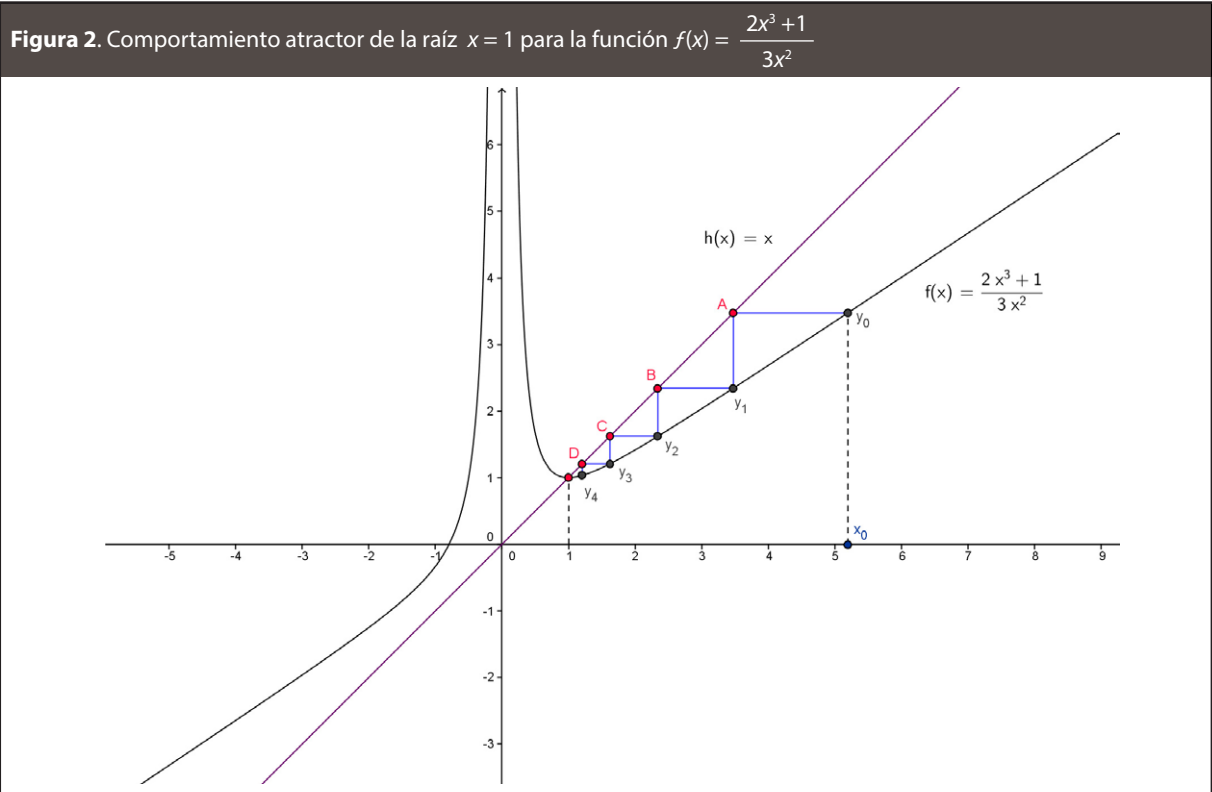
4. Se traza una paralela al eje  $y$  hasta marcar el punto de corte con la gráfica de  $f(x)$ , este nuevo punto tiene ordenada  $f(y_0) = f(f(x_0))$ .

5. Se repite el proceso las veces que se considere conveniente.

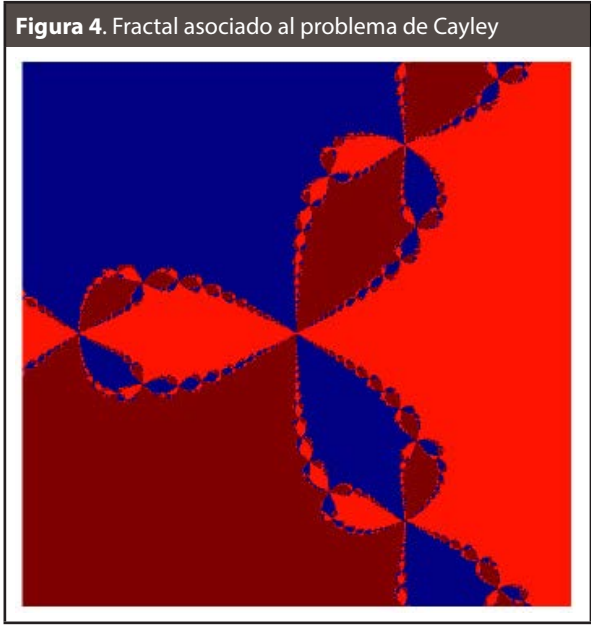
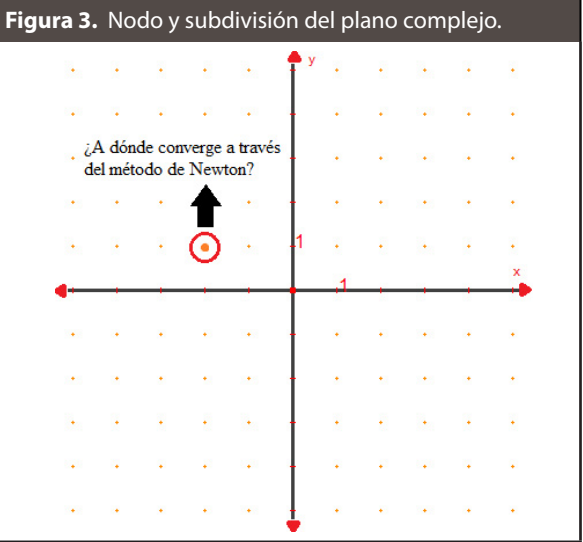
En la **Figura 2** se muestra como la órbita del punto  $x_0 = 5,19$  converge hacia 1 y esta característica de que exista un intervalo tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 1$  hace que el punto  $x = 1$  sea un punto atractor de  $f(x)$ .

Para las raíces complejas de  $f(z)$  el análisis de la convergencia se realiza considerando cada punto o *nodo* de una subdivisión del plano complejo como aproximación inicial para la iteración del método de Newton, como se muestra en la **Figura 3**. Luego se le asigna un color a cada raíz real o compleja de  $f(z)$  y las sucesiones de puntos obtenidas al iterar el método de Newton se pintan del color de a cada raíz en caso de converger a ella, Rubiano (2007).

De lo anterior se obtiene el fractal de la **Figura 4**. Se puede observar que la figura se encuentra seccionada en tres partes y cada una de ellas está representada por un color, donde el color rojo se relaciona con la raíz  $1 + 0i$ , el azul a la raíz  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , y por último, el marrón con  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

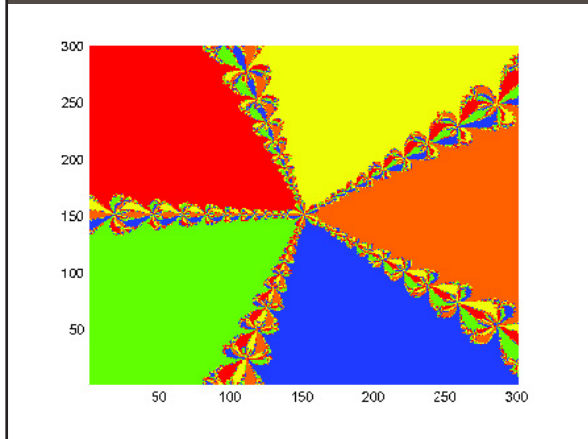


Además, se observa que los puntos de las fronteras en las secciones tienen un comportamiento caótico, en general estas zonas se conocen como conjunto de Julia y las zonas pintadas de un solo color como conjunto de Fatou, como se muestra en Rubiano (2007).



Así, de forma similar al fractal de la **Figura 4**, se pueden obtener otros fractales. El fractal que se presenta en la **Figura 5** es el asociado al extender el problema de Cayley para la función  $f(z) = z^5 - 1$ .

**Figura 5.** Fractal asociado al problema de Cayley para la función  $f(z) = z^5 - 1$



En la **Figura 5** se observan cinco zonas pintadas de colores diferentes y el comportamiento caótico de las fronteras de estas.

En general se puede obtener los fractales para las funciones de la forma  $f(z) = z^m - 1$  para  $m \in \mathbb{Z}$  en los que el valor de  $m$  determina el número de zonas en que se divide la imagen.

#### 4. CONCLUSIONES

Al comparar el resultado de operar la función de iteración del método de Newton para la función  $f(z) = z^3 - 1$ , dada por

$$z_{n+1} = \frac{2z_n^3 + 1}{3z_n^2},$$

con una tolerancia  $tol = 10^{-11}$  y un máximo de 100 iteraciones con los resultados de las tablas 1, 2 y 3 se obtiene:

Para la solución  $(1, 0)$ , es decir, la raíz  $1 + 0i$ .

1. En 9 iteraciones la aproximación  $1,000000 - 2,103629 \times 10^{-27}i$  con error  $6,761368 \times 10^{-14}$ .
2. En 8 iteraciones la aproximación  $(1,000000, 5,292839 \times 10^{-21})$  con error  $6,671433 \times 10^{-14}$ .

Para la solución  $(-0,5, 0,866025)$ , es decir, la raíz  $-0,5 + 0,866025i$ .

1. En 10 iteraciones la aproximación  $-5 \times 10^{-1} + 8,66025 \times 10^{-1}i$  con error  $1,650465 \times 10^{-15}$ .

2. En 8 iteraciones la aproximación  $(-5 \times 10^{-1}, 8,660254 \times 10^{-1})$  con error  $5,319353 \times 10^{-8}$ .

Para la solución  $(-0,5, -0,866025)$ , es decir, la raíz  $-0,5 - 0,866025i$ .

1. En 10 iteraciones la aproximación  $-5 \times 10^{-1} - 8,66025 \times 10^{-1}i$  con error  $1,650465 \times 10^{-15}$ .
2. En 8 iteraciones la aproximación  $(-5 \times 10^{-1}, -8,660254 \times 10^{-1})$  con error  $5,319353 \times 10^{-8}$ .

Así se puede notar que en cualquiera de los casos se encuentra una aproximación de las raíces de  $f(z) = z^3 - 1$  y que las aproximaciones parecen ser iguales precisamente por la equivalencia topológica entre los planos real y complejo.

También se concluye que el método de Newton continúa siendo un método eficiente al momento de aproximar soluciones no solo de ecuaciones no lineales de variable real o compleja sino también de sistemas de ecuaciones no lineales.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo hace parte de los objetivos del proyecto de investigación estudiantil Generalización del método de Newton, financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales (VIPRI) de la Universidad de Nariño.

#### REFERENCIAS

- Burden, R. y Faires, D. *Análisis Numérico*, séptima edición, México, International Thomson Editores, (2002), pp. 66-74.
- Gutiérrez, J.; Olmos, M. y Casillas, J. *Análisis Numérico*, México, Interamericana Editores, (2010), pp. 30-37.
- Mora, W. (2010). *Introducción a los métodos numéricos* [e-book]. Costa Rica, Escuela de Matemática - Instituto Tecnológico de Costa Rica: Disponible en [https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora\\_MetodosNumericos/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf](https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora_MetodosNumericos/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf) [Consultado 30 de enero de 2017].
- Pita, C. *Cálculo Vectorial*, México, Escuela de Ingeniería - Universidad Panamericana, (1995), pp. 319-331.
- Plazas-Salinas, S. y Gutiérrez-Jiménez, J. (2013). *Dinámica del Método de Newton* [e-book], España: Universidad de la Rioja, servicio de publicaciones. Disponi-

ble en: Dialnet <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=529750> [Consultado 25 de noviembre de 2016].

- Rubiano, G. (2007). Método de Newton, Mathematica y Fractales: Historia de una Página. *Boletín de matemáticas*, 14(1), pp. 44-63, [Online] Disponible en <http://www.bdigital.unal.edu.co/38088/1/40459-181969-1-PB.pdf>. [Consultado 25 de enero de 2017]
- Sauer, T. *Análisis Numérico*, Segunda edición, México, Pearson Educación, (2013), pp. 51-58.
- Sutherland S. (2014). *An Introduction to Julia and Fatou Sets*. In: Bandt C., Barnsley M., Devaney R., Falconer K., Kannan V., Kumar P.B. V. (eds) *Fractals, Wavelets, and their Applications*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, [e-book]. Springer. Disponible en [https://www.researchgate.net/publication/287394590\\_An\\_Introduction\\_to\\_Julia\\_and\\_Fatou\\_Sets](https://www.researchgate.net/publication/287394590_An_Introduction_to_Julia_and_Fatou_Sets). [Consultado 25 de enero de 2017]

**PARA CITAR ESTE ARTÍCULO /  
TO REFERENCE THIS ARTICLE /  
PARA CITAR ESTE ARTIGO /**

Terán Tarapués, J.A.; Rúa Alvarez, C.M. (2018). El Método de Newton para raíces complejas. Fractales en el problema de Cayley. *Revista EIA*, 15(29), enero-junio, pp. 97-108. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.24050/reia.v15i29.1131>